第１章　力学

Ⅰ　速度と加速度

１.１　平均の速度と瞬間の速度

【平均の速度】　時間$\Delta t = t_2 - t_1$の間に$\Delta x = x_2 - x_1$だけ動いたとすると以下のように表せる。

【瞬間の速度（速度）】　平均の速度における時間$\Delta t = t_2 - t_1$を限りなく小さくしたもの
（単に「速度」といった場合は、**瞬間の速度**を表す）

また、「速度」はベクトル量だが、「速さ」はスカラー量なので、速さは $|v|$ である。

１.２　加速度a と$v - t$グラフ

【加速度a】　加速度aとは１秒あたりの速度の変化率のことである。

（補足）　変化率とは中学生の１次関数の範囲で習う変化の割合（傾き）のことであり、高校数学で習う通り**その点における接線の傾き**を求めるときには微分をすれば良い。

【ここまでの話からまとめると】

速度は座標xの時間微分であり、加速度は速度vの時間微分（座標xの２階微分）ということだ！

大学では、速度を$\dot{x}$、加速度を$\ddot{x}$のように表すので覚えておくといいかもしれない。

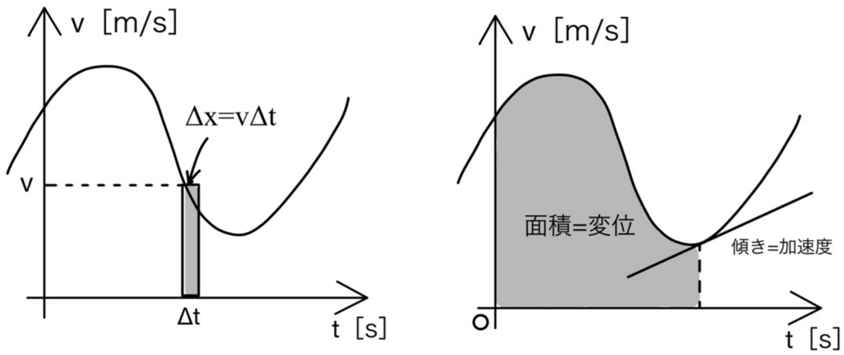
【$v-t$グラフ】　横軸に時刻t[s]、縦軸に速度v[m/s]をとって速度の変化を表したグラフ。

前のページで言った通り、加速度aは傾きを表すから１次関数的に考えると、

$$v = v_0 + at\ [m/s]$$

である。

物体がどれだけ動くかは$v-t$グラフを元に考えることができる。微小時間Δt[s]の間については速度がほぼ一定とみなせるので、物体の変位は$v \cdot \Delta t$であるとでき、これは短冊の面積に等しい。従って、**ある時間内における物体の変位は$v-t$グラフとt軸の囲む面積に等しくなる。**



（上の２つの図は傾きが変化しているが、簡単な問題では傾きが一定で設定されている）
→傾き一定の場合で考えてみよう！

【等加速度直線運動】
初期条件：時刻 $t = 0$[s]に$x = x_0$[m]、 $v = v_0$[m/s]、加速度a[m/s²]で等加速度直線運動を行う物体の力学３式は、

【力学３式の導出】

【力学３式を微分方程式として捉えるメリット】

①

②

【エネルギー保存則からも導出できる】

1.3　相対速度

【相対速度】

A の持つ速度が$\overrightarrow{v_A}$、B の持つ速度が$\overrightarrow{v_B}$の時、A から見た B の相対速度$\overrightarrow{v_{AB}}$は

『A に対する B の相対速度』と言ったら、『A を基準とした B の相対速度』のこと。

つまり、相対速度＝（対象物）-（基準）だ！（位置、加速度も同様）

Ⅱ　落下運動・放物運動

２.１　重力加速度と自由落下運動

地表付近にあるすべての物体は、地球から引力を受けている。この力のことを**重力**という。高いところで手を放した物体は重力によって落下するが、空気抵抗を無視した場合、物体が落下していくときの加速度は、物体によらず一定値となることが知られている。この加速度のことを重力加速度といい、その大きさをgで表す。gの値は地表付近ではおよそ9.8[m/s^2]である。

【重力加速度】地表付近の物体は鉛直下向きg = 　　　$[m/s^2]$の重力加速度を持つ。

２.２　鉛直投げ上げ運動

鉛直上向きに投げ上げられた物体の運動を考えてみる。投げられたあと、この物体は鉛直下向きの加速度を持つから次第に上向きの速さが遅くなり。ある点で速度が0[m/s]となって、そして下向きの速度となって落下して戻ってくる、という運動を行う。これも自由落下と同様、鉛直下向きの加速度$g[m/s^2]$の等加速度直線運動である。初速度$v_0[m/s]$で鉛直上向きに投げ上げた物体の運動について考える。投げ上げた点を原点とし今度は鉛直上向きに軸を設定すると、物体の加速度は鉛直上向きに$-g[m/s^2]$であるから、投げてからも$t[s]$後の速度$v[m/s]$、座標$y[m]$について等加速度直線運動の関係式より、

$$v = v_0 + (-g)t \text{[m/s]}$$
$$y = v_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \text{[m]}$$
$$2(-g)y = v^2 - {v_0}^2$$

という式が成立する。

【鉛直投げ上げ運動】

鉛直投げ上げ運動について以下の特徴がまとめられる。鉛直投げ上げ運動を解く際にはこれらの特徴を用いると素早く計算することができる。

①

②

③

④

２.３放物運動

仰角θ、初速V_0[m/s]で打ち出した物体の運動について考える。空中ではこの物体は重力により鉛直下向きに重力加速度g[m/s^2]を持つが、水平方向には加速度を持たない。そこで、この物体の運動を**水平方向と鉛直方向とに分解して考える。**

図のように軸を取ると、初速度を成分分解して、

x軸方向の初速度$V_0 cos\theta$　　y軸方向の初速度$V_0 sin\theta$

となるから、各軸方向の運動は以下のようにまとめられる。

【放物運動】
x軸方向：初速度$V_0 cos\theta$[m/s]の等速運動
y軸方向：初速度$V_0 sin\theta$[m/s]、加速度-g[m/s^2]の等加速度運動(鉛直投げ上げ運動)

よって、投げてから$t[s]$後の物体の座標は

$$x = (V_0 cos\theta)\cdot t\text{[m]}$$
$$y = (V_0 sin\theta)\cdot t + \frac{1}{2}(-g)t^2\text{[m]}$$

と表される。tを消去して得られる軌跡は放物線である。このように、斜方投射を扱う際には水平方向と鉛直方向とに運動を分けて扱うのがポイントである。

【放物運動(斜方投射)】
x軸方向:初速度$V_0 cos\theta$の等速度運動
y軸方向:初速度$V_0 sin\theta$、加速度g[m/s^2]の等加速度運動(鉛直投げ上げ運動)
①

②

Ⅲ 物体に作用する力とつり合い

３．１　力のつり合いと運動の法則

物体に作用するすべての力の合力が$\vec{0}$であるとき、**力がつり合っている**という。このときには静止している物体は静止を続け、動いている物体はその速度を維持し続けて等速直線運動を行う。これを**慣性の法則（運動の第一法則）**という。この慣性の法則をはじめ、運動に関する性質をまとめたものを**ニュートンの運動の法則**という。

【運動の法則】

第一法則 慣性の法則

物体に作用する力の合力が $\vec{0}$ [N]となる場合、物体は静止または等速度運動を行う。

第二法則 運動方程式

物体に作用する力の合力を $\vec{F}$[N]とすれば、物体は加速度運動を行い、質量をm[kg]、加速度を$\vec{a}$[m/s^2]とすると$m\vec{a}=\vec{F}$が成立する。

第三法則 作用反作用の法則

物体Aが物体Bに力を及ぼすとき、物体Aは物体Bから等大逆向きの力を受ける。

３．２ 力学問題の基本的な解法

力学の問題は以上の運動の法則に基づき、以下の手順に従って解くことが基本となる。

【力学問題の基本的な解法】

① **軸を設定してから各物体に作用している力を非接触力、接触力、慣性力の順に描き出す。**

【鉄則】

【鉄則】

②**各方向ごとに運動方程式または力のつり合いを立てる。**

・垂直な方向に力を分解し、それぞれの方向ごとで考える。

・極力分解する力、または加速度が少なくなる方向を選ぶ。

【鉄則】

③**式を連立して未知数について解く。**

・未知数の数に対して式の数が足りない場合は、束縛条件やまだ使っていない問題文中で与えられている条件がないかを探してみる。

④**設問に応じて運動を解析する。**

・等加速度運動となる場合、いったん公式を利用して時間や位置を求める。

３.３ 力の種類

物体に作用する力にはさまざまなものがあるが、次の２種類に分けて考えていくとよい。

【力の分類】

①**場の力（非接触力）：物体が場から受ける力および見かけの力**

重力、万有引力、クーロン力、電場による力、磁力、慣性力

②**接触力: 接触している物体からは必ず力を受ける**

バネの弾性力、張力、垂直抗力、静止摩擦力、動摩擦力、浮力など

（作用反作用を気にして物体ごとに力の作用図を描くようにすること。）

【特に大事な考え方】

①垂直抗力

AとBが接触しているための条件は、力のつり合いの式や運動方程式によって計算して求められた垂直抗力の大きさN [N]が実際に存在することである。つまり２物体が離れない条件は、２物体間に作用する垂直抗力の大きさNが負でないことである。逆に言えば、２物体が離れる時、$N=0$となる。

②浮力

物質が液体(または気体)中にあるとき、物質は物質が**排除した液体(または気体)が本来受けていた重力**と同じ大きさの浮力を鉛直上向きに受ける。密度ρ[kg/m^3]の液体中に全て浸かっている体積V[m^3]物体は鉛直上向きに$\rho V g$[N]の力を受ける。

③弾性力

バネが伸びたり縮んだりすると、バネの長さをもとの長さ(自然長)に戻す方向に伸び縮みの大きさに比例した力を受ける(フックの法則)。この比例係数をバネ定数。または弾性定数という。バネ定数k[N/m]のバネが自然長から$x_1[m]$伸びている場合には縮める方向にkx_1[N]の力が、自然長から$x_2[m]$縮んでいる場合には伸びる方向にkx_2[N]の力が作用する。

これらをまとめて表すと、伸びる方向を正として自然長からの変位を$x[m]$ (縮んでいる場合xは負の値となる)とすれば、x軸方向の弾性力は以下のようになる(符号に注意)。

$$F=-kx\text{（フックの法則）}$$

３.４ 静止摩擦力

粗い水平面の上に質量m[kg]の物体を置き、水平に外力F[N]を加える場合を考える。このとき、粗い面の上であれば外力が大きくならないと滑り出さない。滑り出すまでの間、物体は静止しているので物体に働いている力はつり合っているが、滑り出すのを妨げている力のことを**静止摩擦力**という。静止摩擦力は接触面と平行な方向に作用し、fなどの文字を利用して表すが、**その大きさは未知であり、つりあいの式もしくは運動方程式から求める**。

一般に、粗い面＝摩擦のある面、なめらかな面＝摩擦がない面を意味する。

静止摩擦力は力のつりあいの式（もしくは運動方程式)を満たす大きさを取るが、その大きさには上限値がある。静止摩擦力がこの上限値を越えると、もはや摩擦によって物体を静止させておくことができなくなり、物体は滑り出す。静止摩擦力の取りうる上限値のことを最大摩擦力という。すなわち、**静止するために必要な静止摩擦力が最大摩擦力を超えると物体は滑り出す。**

最大摩擦力の大きさは、接触面間に作用する垂直抗力の大きさN[N]に比例し、$\mu_0 N$で与えられる。この比例定数μ_0を**静止摩擦係数**という。静止摩擦係数は２つの物体の素材や形によって決まる定数である。接触面の間に作用する力はこの摩擦力と垂直抗力の2つであり、この２つの力の合力を**抗力**という。**静止摩擦力の大きさは最大摩擦力$\mu_0 N$であるとは限らない**。力のつりあいの式から計算する。

【静止摩擦力】 粗い面において摩擦力が作用。 静止摩擦力の大きさは未知数として扱い、力のつり合いまたは運動方程式から求める。 ※

３.５　作用・反作用の法則

力というのは決して一方的に作用することはなく。AがVに力(作用)を及ぼすと、Bは大きさが等しく。向きが逆の力(反作用)を及ぼしかえす。これを作用・反作用の法則(運動の第三法則)という。

【作用・反作用の法則】 物体Aが物体Bに力を及ぼすとき、物体Aは物体Bから等大逆向きの力を受ける。

Ⅳ 運動方程式

４．１　運動方程式

物体に作用する力がつり合っているとき、物体は静止もしくは等速度直線運動を続ける。これに対して、物体に作用する力がつり合っていないときは、物体はその力に応じた加速度を生じ、物体の運動状態が変化する。物体の質量をm[kg]、物体に作用する力の合力をF[N]、物体の持つ加速度を$a[m/s^2]$ とすると、

$$ma = F$$

という関係が成立する(運動の第二法則)。この式を運動方程式という。

力および加速度は一般にはベクトル量であるから、各軸方向の運動方程式を組み合わせることにより、

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

となる。

なお、物体に作用する全合力が$\vec{0}$[N]（$\vec{F} = \vec{0}$）のときは$\vec{a} = \vec{0}$となり、**全外力がつり合っている場合は加速度がなく、等速度直線運動(もしくは静止)を行う**ことが運動方程式からも示される。

【運動方程式】
物体に作用している力と質量・加速度の間に$m\vec{a} = \vec{F}$が成立

力学の問題は以下の順番で考えると良い。
① 図を自分で描き写し、物体に作用している力をすべて図示する。
② 加速度の方向を考え、座標軸を設定する。
③ 力を座標軸方向とそれに垂直な方向とに分解する。
④ 運動方程式$ma = F$を各軸方向について立てる。
⑤ 立てた運動方程式を数学的に解く。

４．２　動摩擦力

　互いに接触している2つの物体がこすれ合うように相対的に運動している場合、接触面がなめらかでないときは運動を妨げるような向きに摩擦力が作用する。この摩擦力を動摩擦力(運動摩際力)という。

　静止摩擦力とは違い、**動摩擦力の大きさは(垂直抗力が一定ならば)常に一定である**。接触面間の垂直抗力をN[N]とすると動摩擦力の大きさf'[N]は

$$f' = \mu' N$$

で与えられる。比例係数μ'を接触面の動摩擦係数(運動摩擦係数)という。

動摩擦力は最大摩擦力よりも必ず小さい。そのため静止摩擦係数μ_0と動摩擦係数μ'の間には

$$\mu_0 > \mu'$$

の関係が成立している。μ_0とμ'は物体の運動速度vに依存しない。

【動摩擦力】
摩擦のある2物体同士の相対運動→動摩擦力が作用
大きさは常に$\mu' N$で相対運動を妨げる向きに作用する。

Ⅴ仕事とエネルギー

５.１　仕事の定義と仕事率

物体に対して力が作用し、その力が作用した結果、**物体が移動した場合、その力は仕事をしたという**。物体に力$\vec{F}$[N](大きさをFとする)を加えた物体が、力の方向と角度θをなす方向に直線的に距離x[m](この移動ベクトルを$\vec{x}$[m]とする)だけ移動したとき、

$$W = Fx\cos\theta$$

を、**その力がした仕事**と定義する。

上の仕事の定義式はベクトルの内積の式と同じであるから、その力が物体に対してした仕事Wはベクトルの内積を用いて

$$W = \vec{F}\cdot\vec{x}$$

で与えられる。

仕事の単位は定義式より、[N・m]=[kg・m^2/s^2]と表されるが、これを[J](ジュール)と書く。

この定義から、移動方向と垂直な方向に作用する力は仕事をしないことや、移動方向と逆向きに作用する力の仕事は負になることが分かる。

また力が単位時間あたりにする仕事を仕事率という。時間t[s]の間にW[J]の仕事をしたときの仕事率Pは

$$P = \frac{W}{t}$$

で与えられる。仕事率の単位は定義式より[J/s]で与えられるが、これを[W](ワット)と書く。

仕事率の定義式を変形すると、

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fx\cos\theta}{t} = F\frac{x}{t}\cos\theta$$

となるが、$\frac{x}{t}$は物体の速さv[m/s]であるから、

$$P = Fv\cos\theta$$

によりある瞬間における仕事率が定義される。ベクトル形式で表せば、

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

となる。

なお、力の向きや物体の移動する向きが途中で変化する場合は微小区間に区切って求める必要がある。

【仕事・仕事率の定義】

力Fのした仕事＝

力Fの仕事率＝

５.２ 力学的エネルギー

物体が外力により仕事をされると、された仕事の分だけ他の物体に対して仕事をすることができるようになる。この状態にあるとき、その物体は**エネルギーを持っている**という。特に、力学現象において物体が持つエネルギーのことを**力学的エネルギー**という。力学的エネルギーには大きく分けて、**運動エネルギー**と**位置エネルギー**の2種類がある。以下に運動エネルギー、位置エネルギーの導出を示す。

【運動エネルギーの導出】

【運動エネルギー】

質量m[kg]の物体が速さで運動しているとき、物体は

$$K = \frac{1}{2} m v^2 [\mathrm{J}]$$

の運動エネルギーを持つ。

また、場所によって決められるエネルギーを位置エネルギーといい、重力による位置エネルギーは以下のようにして導出できる。

【重力による位置エネルギー】

質量m[kg]の物体が高さh[m]にあるときについて考える。物体が高さh[m]の位置から0[m]の位置まで移動するとき、重力は物体に対して

$$W = mgh\text{[J]}$$

の仕事をする。

言い替えれば、この物体は高さh[m]にあるとき、高さ0[m]の位置まで移動することにより重力からmgh[J]の仕事をしてもらうことができる。

これより、質量m[kg]の物体が高さh[m]にあるとき、その物体は

$$U_g = mgh\text{[J]}$$

のエネルギーを持つと考え、これを重力による位置エネルギーという。

なお、重力による高さの基準点は任意に取ってよい。基準点より低い位置高さ$-h$[m]にあるときは位置エネルギーは$mg(-h) = -mgh$で与えられる。

また、水平方向の移動では重力のする仕事は0であるため、**同じ高さにあるとき、重力による位置エネルギーは同じ値になる。**

【バネによる位置エネルギー】
弾性定数がk[N/m]のバネに物体を接続し、図のように自然長の位置を原点としてx軸を固定する。**バネが$x[m]$の位置から0[m]の位置まで移動するときに物体に対してする仕事を求める。**

物体に作用する力は物体の位置に応じて変化するので微小区間に区切って考える。x[m]の位置から原点に向かってy[m]移動した位置$x-y$[m]にある時、物体には$k(x-y)$の大きさの力が$-x$の向きに作用する。よって、物体が位置$(x-y)$から微小距離dy[m]だけ移動する（力の向きと同じ向きであることに注意）とき、**バネの弾性力は**

$$k(x-y)\cdot dy$$

の仕事をする。物体がx[m]の位置から0[m]の位置まで移動する間にバネの弾性力がする仕事はこの微小な仕事を足し合わせることにより、

$$W=\int_0^x k(x-y)dy=\left[kxy-\frac{1}{2}ky^2\right]_0^x=\frac{1}{2}kx^2$$

と求められる。

これより、弾性定数がk[N/m]のバネの自然長からの変位がx[m]のとき、そのバネは

$$U_k=\frac{1}{2}kx^2[J]$$

のエネルギーを持つと考えられる。これをバネの弾性力による位置エネルギーという。

5.3　力学的エネルギー保存則

物体に対して作用する力のうち、重力や弾性力といった力を非保存力という。
その力がする仕事を位置エネルギーとして捉え直すことの出来る力のことを保存力という。これに対して、それ以外の垂直抗力、摩擦力、張力といった力を非保存力という。
このとき、非保存力が作用していない、もしくは作用していても仕事をしない場合にいは、物体のもつ力学的エネルギー（＝運動エネルギーK＋位置エネルギーU）が変化しないことが知られている。これを**力学的エネルギー保存則**という。

【力学的エネルギー保存則】
物体に対して保存力しか作用していない、もしくは非保存力が作用していても仕事をしないときはその系の力学的エネルギーの総和は一定に保たれる。

$$K+U=\text{一定値}$$

VI 運動量と力積

６．１ 運動量と力積

５．３にて力学的エネルギー保存則を扱ったが、物体間の衝突を扱うのには運動量と力積を用いて考えるとよい。

物体に一定の力 F [N]が作用し、時間Δt[s]の間に速度がv_0 [m/s]からv [m/s]に変化するときについて考える。このとき、加速度は$a = \frac{v-v_0}{\Delta t}$であるから、運動方程式$ma = F$にこれを代入して変形すると、

$$mv - mv_0 = F\Delta t$$

が成立する。

ここで左辺に出てくる**(質量)×(速度)**を**運動量$\boldsymbol{p}$**と定義し、右辺に出てくる**(力)×(時間)**を**力積$\boldsymbol{I}$**と定義する。このとき、上の式は

$$p - p_0 = I$$

と書き換えられるので、**運動量の変化はその間に物体が受けた力積**に等しいということが言える。（運動量pは物体の勢いを表す物理量である。）

また、運動量の定義式（$p = mv$）を時間微分すると、

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt}(= ma)$$

となるが、運動の第二法則より$ma = F$が成立するので、結局運動量の時間微分はその物体が受ける力に等しいということが言える。

また、速度はベクトル量であるから運動量もベクトル量であり、これを$\vec{p}$で表す。また、力はベクトル量であるから力積もまたベクトル量であり、これを$\vec{I}$で表す。

なお、力積$I = F\Delta t$[N･s]の単位[N･s]は運動量の単位[kg･m/s]と一致している。

また多くの場合、物体に作用する力F[N]は時々刻々と変化する。

このような場合は、力が作用する時間を微小時間Δt[s]毎に分割して、その間に作用する力積を求め、それらを足し合わせることにより全力積を計算すればよい。

すなわち、

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$$

により力積が求められる。

【運動量と力積】
運動量
力積
運動量と力積の関係

6.2　直線上での運動量保存則

摩擦のない床面の上を一直線上で運動する質量m_1[kg]の物体とm_2質量[kg]の物体とが、速度v_1[m/s]、v_2[m/s]で衝突し、その結果、速度がv'_1[m/s]、v'_2[m/s]になったとする。

衝突中、2 つの物体は互いに力を及ぼしあうが、作用・反作用の法則から同じ大きさで逆向きの力が各物体に作用する。そこで衝突中に各物体に作用する力の大きさをF[N]、衝突時間をΔtとし、運動量変化と力積の関係式を右向きを正として立てると、

$$m_1 v'_1 - m_1 v_1 = (-F)\Delta t$$

$$m_2 v'_2 - m_2 v_2 = F\Delta t$$

これらより、$m_1 v'_1 - m_1 v_1 + m_2 v'_2 - m_2 v_2 = 0$となるが、これを変形して

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

この式は**衝突前後で全運動量が保存される**ことを意味する。これを**運動量保存則**という。

全運動量が保存されるのは、着目する 2 つの物体に作用する力が、互いに及ぼし合う力のみであり、これ以外の別の力が外から作用していないためである。**存在する物体のうち、どこまでの範囲の物体に着目するかを考えている系**という。その系の内部で互いにやり取りされ、系の内部に作用・反作用の対が存在する力を内力といい、系の外部から作用し、系の内部には作用・反作用の片方しか存在しない力を外力という。これらの言葉を用いて言い替えると、**ある系に外力が作用しないとき、その系の全運動量が保存される**。

【運動量保存則】

物体系のある方向について、外力が作用せず、内力のみしか作用していない場合はその方向の全運動量が保存される。特に 2 物体の場合は、

$$m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2} = m_1 \overrightarrow{v'_1} + m_2 \overrightarrow{v'_2}$$

※衝突、分裂、合体などは内力のみしか作用しない典型例である。

6.3　平面上での運動量保存則

６.２で考えた運動量保存則は一直線上についてのものだが、二次元平面内において斜めに物体が衝突する場合についても同様の運動量保存則を考えることができる。

図のように、摩擦のない床面の上を質量m_1、m_2 [kg]の物体が、それぞれ速度ベクトル$\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$[m/s]で衝突し、その結果速度ベクトルが$\overrightarrow{v'_1}$、$\overrightarrow{v'_2}$[m/s]になったとする。

この２つの物体に外力が作用しなければ、やはりこの系についても運動量が保存されるが、運動量はベクトルであるから、**衝突前後で運動量ベクトルの総和が保存される**。すなわち、

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

が成立する。また、図のようにx、y軸を取って成分分解して考えると、x軸方向、y軸方向それぞれの運動量が保存されるから、

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$
$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}$$

が同時に成立する。

【平面内での運動量保存則】

外力が作用しない場合は平面内での射衝突・分裂などにおいて運動量ベクトルの総和が保存。

$$m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2} = m_1 \overrightarrow{v'_1} + m_2 \overrightarrow{v'_2}$$

Ⅶ 物体の衝突と跳ね返り係数

７．１ 跳ね返り係数

摩擦のない床面の上を一直線上で運動する質量m_1[kg]の物体と質量m_2[kg]の物体とが、右向きを正として速度v_1[m/s]、v_2[m/s]で衝突し、その結果、速度がv'_1[m/s]及びv'_2[m/s]になったとき、運動量保存則

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

が成立する。

しかし、この式だけでは衝突後の２物体の速度v'_1、v'_2を求めることは不可能である。金属球同士の衝突と粘土で作った球同士の衝突を比較すれば明らかなように、実際の衝突後の速度はこの運動量保存則と、２物体の材質・形状によって決まる。

実験によると、衝突前の２物体の相対速度の大きさ(＝相対的に近づく速さ)と、衝突直後の２物体の相対速度の大きさ(＝相対的に離れる速さ)との比の値は、２物体によって決まる一定の値になることが知られている。上図の場合、相対的に近づく速さは$v_1 - v_2$相対的に遠ざかる速さは$v'_1 - v'_2$であり、

$$e = \frac{(\text{相対的に離れる速さ})}{(\text{相対的に近づく速さ})} = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2}$$

この比の値eのことを、その２物体の跳ね返り係数という。

また、衝突に際して、相対速度の向きが必ず反転するので、衝突前後の相対速度$v_1 - v_2$と$v'_1 - v'_2$を用いれば

$$e = -\frac{(\text{衝突直後の相対速度})}{(\text{衝突直前の相対速度})} = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$$

と表されることになる。

必ず離れる速さは近づく速さ以下になる。そのため、跳ね返り係数eは$0 \leqq e \leqq 1$の範囲の正の値となる。

【跳ね返り係数】

７.２　壁面・床面との垂直な衝突による跳ね返り

今までは２物体間の衝突を考えてきたが、壁面や床面と物体が衝突して跳ね返るときは壁や床の質量をはっきりさせることができないため、運動量保存則を用いることができない。しかし、壁面や床面は通常、物体に比べて質量が非常に大きく、静止したままであることが多い。このような場合は物体と壁面・床面との間の跳ね返り係数eを用いて跳ね返りを考えることができる。

７.３　壁面・床面との斜めの衝突による跳ね返り

物体が壁面や床面に対して斜めに衝突するとき、摩擦が無視できる場合には**接触面に平行な速度成分は衝突によって変化しない**。一方、**接触面に垂直な速度成分は跳ね返り係数ｅによって速さが変化する**。右図のように軸を取り、衝突前後の物体の速度をそれぞれ(v_x, v_y)及び(v'_x, v'_y)とすると（衝突前のy軸成分は負の値となる）

$$v'_x = v_x$$

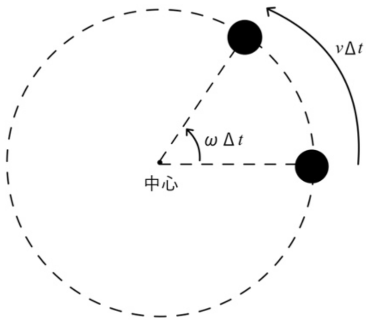
$$e = -\frac{v'_y}{v_y}$$

が成立する。

Ⅷ 円運動

８.１ 角速度と等速円運動

下の図のように、円周の上をなぞって物体が運動することを**円運動**という。



円運動する物体と円の中心を結ぶ線分(動径)が単位時間(１秒間)に掃く中心角を**角速度 $\boldsymbol{\omega}$[rad/s]**という。角速度が一定値であるとき物体の回転する速さは一定値となるので、このような円運動を**等速円運動**と呼ぶ。角速度がω[rad/s]の等速円運動において、時間Δt[s]の間に物体が回転する角度は、

$$\theta = \omega \Delta t$$

で与えられる。ここでは簡単のため、等速円運動に話を限定して取り扱うことにする。

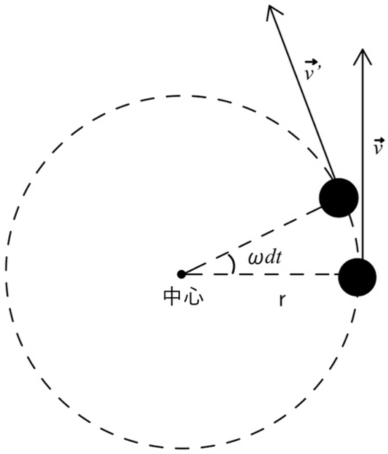
物体が円を一周するのに要する時間を周期という。角度2πだけ回ると円を一周することになるので

円運動の周期T[s]は

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

で与えられる。また。1 秒間の回転数f（単位は[回/s]＝[Hz](ヘルツ)を用いる)は、$f = \frac{1}{T}$となる。

半径r[m]の円周上を円運動する物体について考える。



物体の速度ベクトルは物体の経路の接線方向を向くから、円運動する物体の速度ベクトルは必ず円の接線方向を向く。物体の速さv[m/s]をとすると時間Δt[s]の間に物体は$v\Delta t$[m]だけ移動し、中心角は$\omega\Delta t$変化するから、

$$v\Delta t = r\cdot\omega\Delta t \Leftrightarrow v = r\omega \ \ [\mathrm{m/s}]$$

と速さは与えられる。

物体が等速円運動を行うとき速さは一定値であるが、速度ベクトルの向きは時々刻々と変化するから、物体は加速度を持っている。微小時間dt[s]の間に速度ベクトルが$\vec{v}$[m/s]から$\overrightarrow{v'}$[m/s]に変化したとする。変化した速度ベクトルを始点をそろえて書き出すと、この時間内での速度ベクトルの変化は

$$d\vec{v} = \overrightarrow{v'} - \vec{v}$$

であるが、

上の図より$d\vec{v}$は円の中心方向を向いている。よって、加速度ベクトル$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$[m/s²]は円の中心方向を向く。その大きさ$a$[m/s²]は、下の図より

$$a = \frac{v\cdot\omega dt}{dt} = v\omega = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

で与えられる。この加速度ベクトルは常に速度ベクトルに直交するため、速度ベクトルの大きさは変えず、その向きのみを変える役割を果たす。

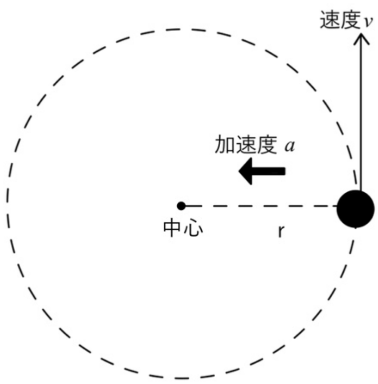
【等速円運動】

周期　$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$

速さ　$v = r\omega$[m/s]　速度は常に接線方向を向く

加速度　$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$[m/s²] 加速度は常に中心方向を向き、速度ベクトルの向きを変える

なお、物体の持つ加速度の大きさなどは円を座標系に置き、物体の座標を時間で微分することによっても得られる。



円運動をする物体は加速度を持つが、このことから円運動をする物体には必ず力が作用していなければならない。物体にはさまざまな力が作用しているが、この力を接線方向と動径方向に成分分解したときに、動径方向に作用している力(の成分)のことを向心力という。等速円運動する物体は中心向きに大きさ$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$[m/s²]の加速度を持つ。このことから、運動方程式を用いて動径方向に作用している力を逆算すると、

$$ma = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r}\text{[N]}$$

となる。

すなわち等速円運動している物体に作用する向心力の合力は、必ず中心向きに大きさ

$$mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r}\text{[N]}$$

となっている。

向心力とは動径方向の加速度を生じさせる力の総称であり、**向心力という名称の力が存在するのではない**。

【向心力】

物体に作用する力の動径方向成分その合力は常に中心向きで大きさは$mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r}$[N]

【円の加速度の導出】

8.2　不等速円運動

不等速円運動においても動径方向については等速円運動のときと同様に扱うことができる。つまり、その瞬間における物体の接線方向の速さをv[m/s]とすると、物体のもつ加速度の円の中心方向成分は$\frac{v^2}{r}$[m/s²]になっているといえる。これと力学的エネルギー保存則を組み合わせることで不等速円運動を解くことができる。

【不等速円運動】

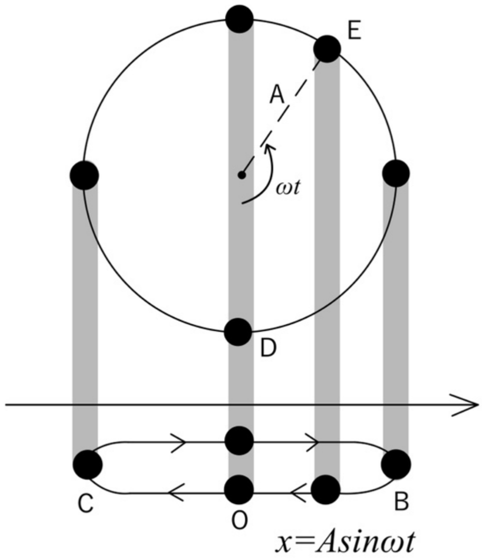
①

②

IX 単振動

９．１　単振動

質点が図のように半径 A[m]、角速度ω[rad/s]の等速円運動を行っているとき、図の方向から光を当ててその影の運動を観察すると、影は図のx軸上の O 点を中心として、B 点と C 点の間を往復運動する。



簡単のため、質点が図の D 点を通過した時刻を$t = 0$[s]として円運動をパラメーター表示すると、

$$(x, y) = (A \sin \omega t\,, A \cos \omega t)$$

であり、時刻t[s]におけるこの質点の投影点は

$$x = A \sin \omega t$$

となる。
今は質点が D 点を通過した時刻を$t = 0$[s]としたが、より一般には時刻$t = 0$[s]における位置を考慮して、

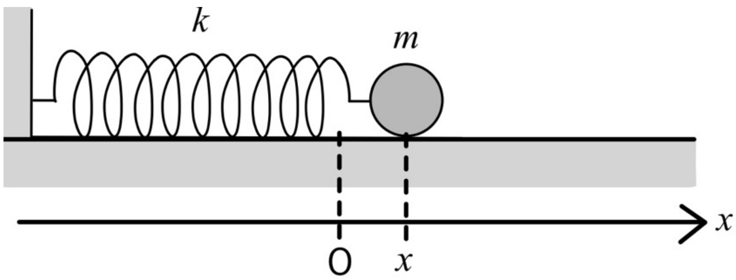
$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

と書ける。
物体の位置がこのような形の式で書ける運動を**単振動**という。単振動の中心からの振れ幅 A[m]を単振動の**振幅**、ω[rad/s]をその単振動の**角振動数**。時刻$t = 0$[s]に物体がいた位置を表すφ_0を**初期位相**、三角関数の中身の部分$(\omega t + \varphi_0)$を**位相**という。

物体が単振動を行う典型例はバネに取り付けた物体の振動現象である。
バネに取り付けた物体のように、運動方程式が

$$ma = -kx\text{（ただし}k\text{は正の定数）}$$

のような関係にまとめられるとき、その物体は以下のような単振動をすることが知られている。



以上の説明をもう少し噛み砕いて説明しよう！

【単振動の現象式】

【単振動と運動方程式】

【端点-振動中心-端点】

なお、単振動の式$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$の A、$\varphi_0$はどのような定数値でも元の運動方程式$ma = -kx$を満たすことが出来る。また逆に、物体の運動方程式が$ma = -kx$の形になる場合の物体の座標$x(t)$は、必ず$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$の形にまとめられることが知られている。すなわち、**運動方程式$ma = -kx$（$k > 0$）を満たすことと、運動が$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ $\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ で表されることは数学的に等価である。**

よって、運動方程式が$ma = -kx$の形になる物体の座標$x(t)$の式を決めるには、$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$の式の A、$\varphi_0$の値を決めてあげれば良く、これらは問題文で与えられた条件(初期条件という)によって決める。

また、運動方程式$ma = -kx$に対して、$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$を分解した$x = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$（ただし$C_1$、$C_2$は任意）を解として用いて$C_1$、$C_2$の定数を決定する、と考えてもよい。

９．２　重力下における単振動（縦の単振動）

天井から鉛直につるした、バネ定数k[N/s]に取り付けた質量m[kg]の物体の運動について考える。バネが自然長のときの物体の位置を原点とし、鉛直下向きにx軸を取る。バネの弾性力は自然長からの変位に比例することに注意すると、物体が位置x[m]にいるときの運動方程式はx軸方向(下向き)を正として

$$ma = mg - kx$$

で与えられる。これを変形すると、

$$a = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

となるが、ここでこれは単振動の現象式の変位を考慮したバージョンの

$$a = -\omega^2(x - x_0)$$

の形と比較すると、

この物体は$x = \frac{mg}{k}$[m]を中心とし、角振動数=$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [rad/s]の単振動を行うことが分かる。

また、x_0とは**物体に作用する重力とバネの弾性力とがつりあう点（位置）である。**

【重力下での単振動】

自然長の位置を基準とした運動方程式を変形して

$$a = -\frac{k}{m}(x - x_0)$$

の形にまとめ、振動中心$x = x_0$(力のつりあいの位置)、角振動数= $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [rad/s]を求める。

９．３　単振動のエネルギー保存則（スーパーエネ保）

【単振動のエネ保】

運動方程式が$m\frac{dv}{dt} = -mv^2(x - x_0)$（単振動の現象式　$a = -\omega^2(x - x_0)$）でかけるなら、

導出は２パターンあるが、そのうちの１つをここで説明する。

９.４　単振動のまとめ

単振動の特徴をまとめると以下のようになる。

【単振動のまとめ】

・『運動方程式が$ma = -kx \ \ (k > 0)$で表せる』

　　$\Leftrightarrow$『$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ で表される単振動を行う』

・振動中心$x = 0$　角振動数$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$　周期$T = \frac{2\pi}{\omega}$

・振動中心で速さが最大になり、$v_{max} = A\omega$[m/s]

・単振動の振動中心は力のつり合いの位置となる。

・加速度が最大となるのは振動端点。

重力下に限らず、つり合いの位置からの変位に比例して復元力(つり合いの位置に戻そうとする力)が作用する場合には単振動を行う。一般に単振動についての解き方をまとめると以下の通りになる。

【単振動の解法】

① 位置x[m]において物体に作用している力（つや自）を描き出し、運動方程式を立てる。

・特定の位置ではなく、任意の位置x[m]で考える

・加速度$a = \frac{d^2x}{dt^2}[m/s^2]$の向きは$x$軸と同じ向きに設定する。

・複数物体がある場合は各物体ごとに別々に立てればよい。

② 式変形して$a = -\frac{k}{m}(x - x_0)$の形を作り、角振動数$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$[rad/s]、振動中心$x_0$ [m]を求める。

・k及びx_0は時刻や位置に依らない定数になるように変形する。

・kが正の場合のみ単振動となる。

・複数物体があり、垂直抗力や張力など未知数が含まれる場合には連立して
　未知数を消去してこの形を目指す。

③ 必要に応じて初期条件から振幅A[[m]及び初期位相φを求める。

・速度が 0[m/s]の位置が与えられていれば(そっと手を離した、など)、
　その位置が端点なので、端点と振動中心の距離が振幅となる。

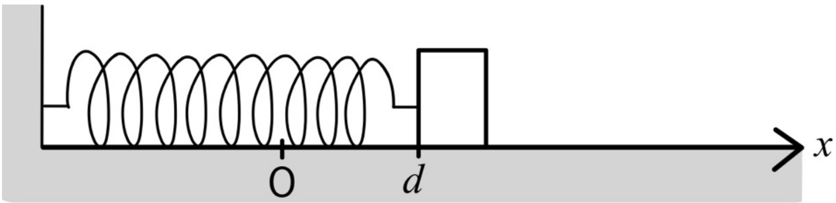
・振動中心での速度が与えられていれば、$v_{max} = A\omega$を利用して振幅を求める事が出来る。

・それ以外の位置での速度が与えられている場合はエネルギー保存則を利用して計算して振幅を求める。

・時刻tにおける位置を求める場合は、物体の時間変化をグラフに描いた上で数式化するとよい。

（例題）

図のように、粗い水平面で軽いバネに質量mの物体を取り付ける。バネが自然長になる位置を原点（$x = 0$）として、水平右向きにx軸をとる。物体の位置をxで表し、時刻をtで表す。$t = 0$に物体を$x = d$の位置から静かに離したところ、物体はx軸負の向きに動き出し、だんだん早くなったあと、次第に遅くなり、$t = t_1$に位置$x = x_1$で速さが 0 になった。物体と水平面の間の動摩擦力をμ、重力加速度の大きさをg、バネのバネ定数をkとする。



問 1

$0 < t < t_1$における加速度のx成分をaとする。この時、物体の運動方程式のx成分を答えよ。

問 2

t_1を求めよ。

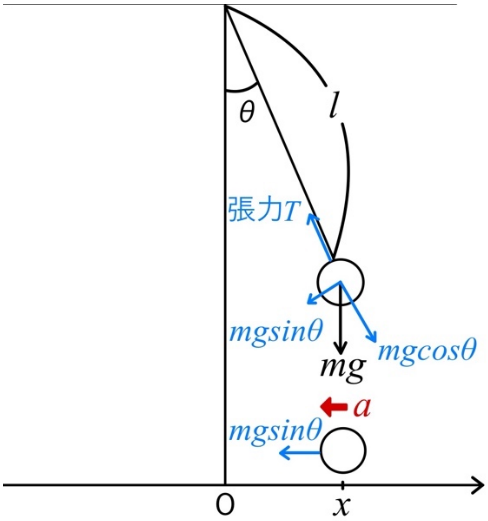
問 3

x_1を求めよ。

X　慣性力

１０.１　単振り子

下の図のように長さl[m]の軽くて非常に長い糸の一端を天井に固定し、これに質量m[kg]のおもりをつるし、つり合いの位置0からほんの少しだけおもりを横に引いて手を離すと、おもりは0点中心として振動する。おもりの振れ幅が微小であれば、おもりは円弧に沿って単振動を行うことが知られている。この振り子を単振り子という。



θは微小なので$mg\sin\theta$は水平方向と近似する。
運動方程式は

$$ma = -mg\sin\theta$$

また、

$$\sin\theta = \frac{x}{l}$$

なので、

$$ma = -mg \times \frac{x}{l}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{g}{l} \times x$$

これも単振動の現象式$a = -\omega^2 \times x$と比較することで$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$とわかるから

単振り子の周期は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となる。

【単振り子】
大きさg[m/s^2]の重力加速度下において長さl[m]の糸に取り付けた物体を微小振れ角で振動させると、物体は円弧に沿って単振動を行う。その周期T[s]は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

であり、物体の質量に依存しない。

１０.２　静止系と運動系

地面に対して動いている電車内に置かれている物体 A を観測するとき電車内に座っている人から観察すると物体 A は静止しているように観察されるが、地面に対して静止している人は物体 A は運動しているように見える。このように、**物体の運動状態はそれを観察する人の立場(運動を記述する座標系)によって変化する。**

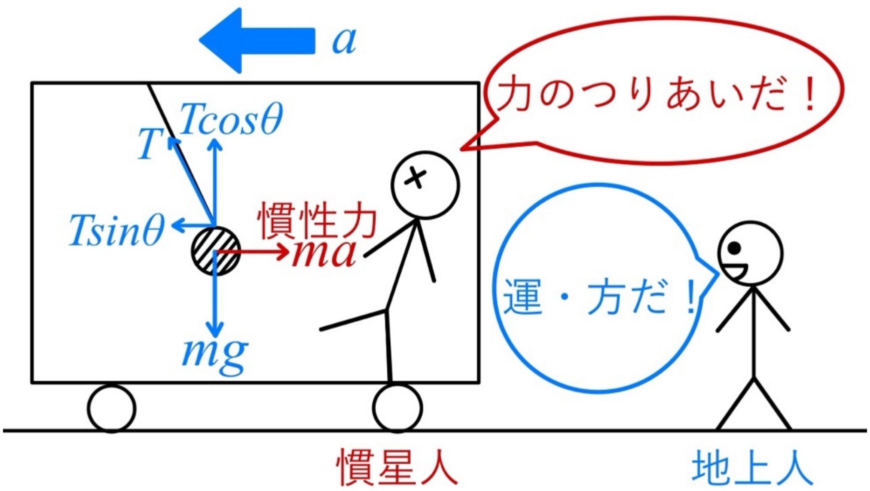
これまで見てきたように、物体の運動を表すためにはまず座標軸を設定するが、その座標軸は地面に固定したものであってもよいし、地面に対して動いている電車内の球に固定したものであってもよい。
しかし、その座標軸(これを**座標系**という)の選び方により物体の運動は異なって観察される。そのため、座標系によってはニュートンの運動方程式$ma = F$が成立しなくなることもある。
運動方程式を含め、ニュートンの運動の法則は今まで考えてきたような地面に固定した座標系において成立する。ここで運動の法則が成立する座標系のことを**慣性系**という（静止している場合は特に静止系という)。慣性系は、運動の第一法則である「慣性の法則」が成立する座標系ということである。一方、地面に対して加速度を持つ乗り物に固定した座標系のように運動の法則が成立しない座標系のことを**非慣性系**という。

１０.３　見かけの重力

物体に作用する重力は、位置によらず常に同じ向き。同じ大きさで作用する。もし観測者が一定の加速度で運動するのなら、この観測者から見たときに物体に作用する慣性力もまた重力と同様に、常に同じ向きに一定の大きさで作用する。そこで、このような場合は物体に作用する重力と慣性力とをベクトル合成し、1 つの力としてまとめてしまった方が力を数え上げやすい。これを**見かけの重力**とよぶ。

１０.４　慣性力と遠心力

加速（減速）中に感じる『おっとっと』、あれがまさに慣性力だ。



地上人：物体は運動方程式を立てて

$$ma = T\sin\theta$$

慣性人：物体は力のつり合いより

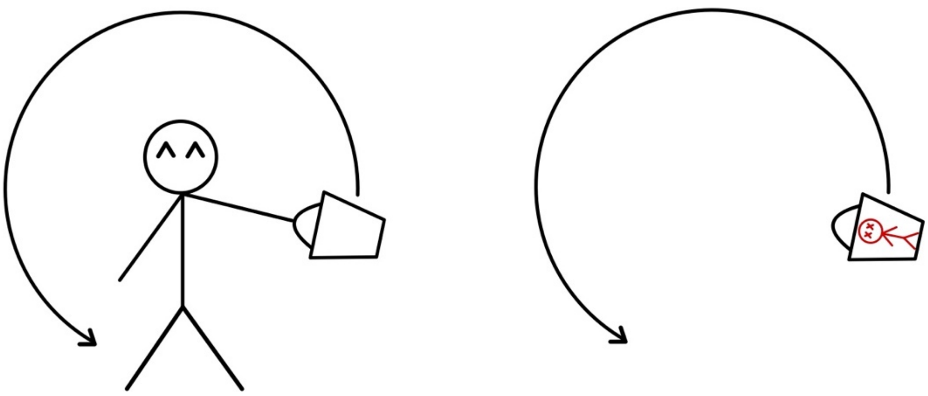
$$T\sin\theta = ma$$

【慣性力】

加速中の乗り物の中にいる人（慣性人）だけが見える力

$$ma$$

（※向きは加速度と逆向き）



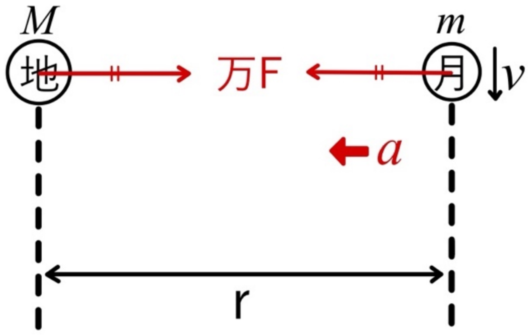
【遠心力】

等速円運動を行う物体に乗って観測すると、物体には半径方向外向きに大きさ$m\frac{v^2}{r}$[N]の遠心力が作用しているように見える。

XI 万有引力・惑星運動①

１１.１　万有引力の法則

質量M[kg]の地球と質量m[kg]の月が距離r[m]だけ隔てて置かれている場合について考える。



このとき、この２つの物体はその質量に応じて互いに引力を及ぼし合う。これを万有引力といい、その大きさF[N]は

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

で与えられる。

向きは互いに引き合う向きで、作用・反作用の法則より各物体に作用する力の大きさは同じである。比例定数 G [N・m^2/kg^2]を万有引力定数といい、その大きさは実験によりG =6.672×10^{-11}[N・m^2/kg^2]であることが知られている。

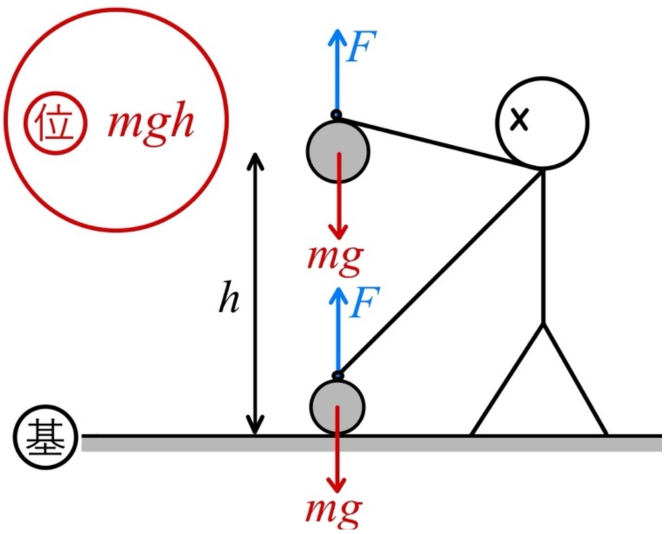
この万有引力は非常に微小な力であるため、通常の力学問題では重力以外の万有引力は無視してよい。この万有引力が問題となるのは惑星運動のときが主である。

【万有引力の法則】
質量M[kg]の物体と質量m[kg]の物体が距離r[m]だけ隔てて置かれているとき、２つの物体間には互いに引き合う方向に、大きさ$F = G\dfrac{Mm}{r^2}$ [N]
の万有引力が作用する。（G [N・m^2/kg^2]は万有引力定数）

１１．２　万有引力による位置エネルギー

重力やバネによる弾性力などと同様に万有引力も保存力であり、万有引力に関する位置エネルギ一を考えることができる。位置エネルギーとは、基準点と比較したときに余分に持っているエネルギーのことであり、その状態から基準点まで移動したときに、位置エネルギーの元となる力が物体に対してなす仕事に等しい。このことを用いて万有引力による位置エネルギーの式を求める。

【重力による位置エネルギー】



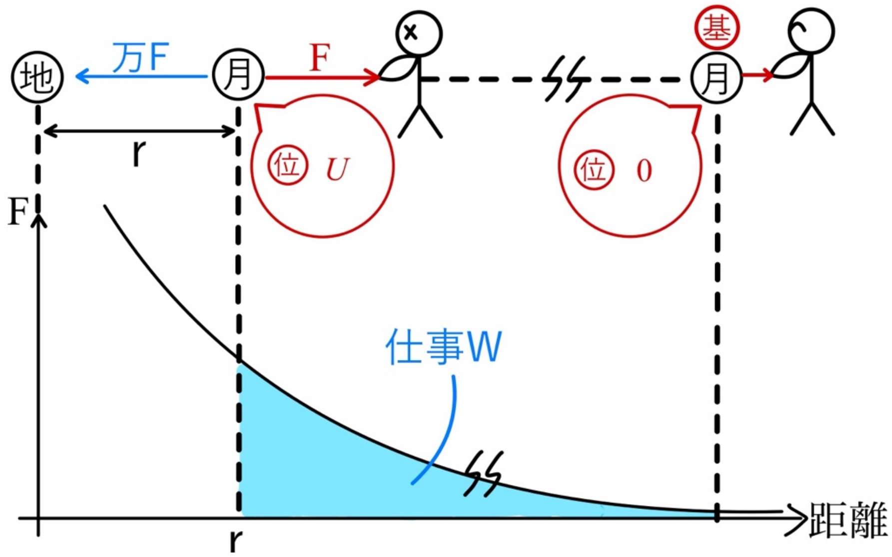
上の図のような場合について考える。人が質量m[kg]の物体を持ち上げるのに必要な力は$F = mg$である。

『人が物体にした』つまり、『物体が人にされた』仕事は、

$$W = F \times h = mgh$$

である。つまり、物体は位置エネルギーmghを得たわけである。

【万有引力による位置エネルギー】



質量M[kg]の地球が図のように固定されており、これから距離r[m]の位置に質量m[kg]の月があるとする。図のように軸を設定し、この物体を無限の彼方まで動かすときに万有引力のする仕事を計算する。

物体（ここでいう月）が大巨人からされた仕事は、

$$W = \int_r^{\infty} G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$= GMm\int_r^{\infty}\frac{1}{r^2}dr$$

$$= GMm[-r^{-1}]_r^{\infty}$$

$$= GMm\left\{-\frac{1}{\infty}-\left(-\frac{1}{r}\right)\right\}$$

$$= G\frac{Mm}{r}$$

物体は無限の彼方に移動すれば位置エネルギーは0になるので

エネルギー保存則スペシャルより

あと−はじめ=仕事

$$0-U = G\frac{Mm}{r}$$

となるから、

【万有引力による位置エネルギー】 $U =$ （※基準は無限遠）

一般に、万有引力のみによる運動では力学的エネルギーすなわち物体の運動エネルギーと位置エネルギーの総和が一定に保たれる。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \text{（一定）}$$

１１．３　ケプラーの法則

地球は太陽から受ける万有引力により、太陽のまわりを等速円運動している。しかし詳しい解析によって実際には地球の軌道は完全な円ではなく、楕円軌道であることが分かっている。17 世紀の始めにケプラーはティコ・ブラーエの集めた天体運動のデータを元に惑星運動に関する以下の 3 つの法則を発見した。

【ケプラーの法則】

第一法則　情円軌道の法則

太陽系の惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円上を運動する。

第二法則　面積速度一定の法則

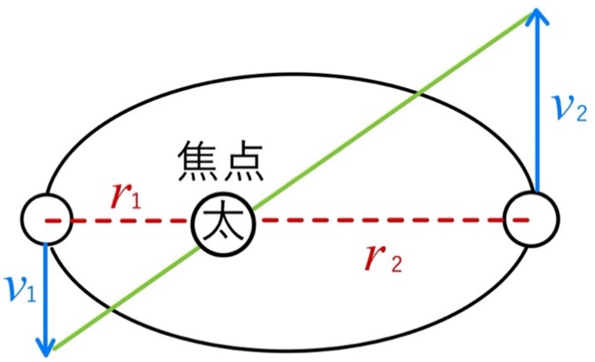
惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間あたりに掃く面積は軌道上のすべての点で一定である。

第三法則　公転周期と長半径の関係

惑星の公転周期の 2 乗は楕円軌道の長半径の 3 乗に比例する。

$$\frac{T^2}{a^3} = (\text{一定})$$

１１．４　面積速度一定の法則

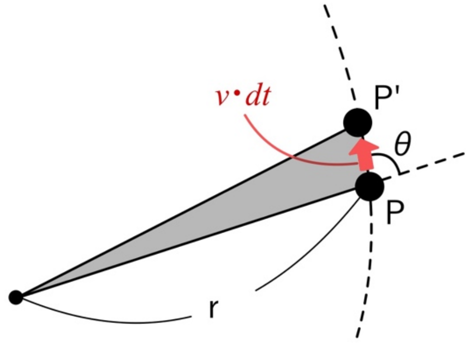


上の図のように、太陽を焦点として地球が回転しているとする。この時

が成り立つ。

基本的には以上の理解のみで OK だが、詳しく知りたい人は以下も読むといいだろう。

平面内で運動する物体Ｐと定点Ｏに対して、Ｐの運動によって線分 OP が単位時間(1 秒)あたりに掃く面積のことを、点Ｏに関する面積速度という。図において、P が微小時間dt[s]の間に P’点まで進んだとすると、微小時間であるからこの間の移動は長さ$v \cdot dt$[m]の直線だとみなせる。線分 OP の掃く面積は近似的に網点の三角形の面積とみなすことができるので、右図のようにθをとるとその面積は



$$dS = \frac{1}{2} r \cdot v \cdot dt \sin\theta \ [\mathrm{m}^2]$$

で与えられる。よって、単位時間あたりに掃く面積すなわち面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} rv \sin\theta$$

となる。

惑星運動の際に作用する万有引力のように、物体Ｐに作用する力が常にその物体と定点Ｏとを結ぶ線分方向に平行な力のことを中心力と呼ぶ。**物体に中心力しか作用しない場合はこの面積速度は一定値に保たれる**ことが知られている。

【面積速度一定の法則】
物体に作用する力が中心力のみであるとき、その物体の面積速度は一定に保たれる。

$$\frac{1}{2} rv \sin\theta = (\text{一定})$$

惑星運動(地球の周りを回る人工衛星の運動なども含んで考える)それぞれの場合の問題に対する取り組み方

①円軌道

１．等速円運動の運動方程式を立てる。

２．周期は$T = \frac{2\pi r}{v}$[s]で求まる。

②楕円軌道上

1. **エネルギー保存則及び面積速度保存則**を連立する。

2. 周期は$\frac{T^2}{a^3} = (\text{一定})$で求まる。

Ⅻ　剛体のつり合い

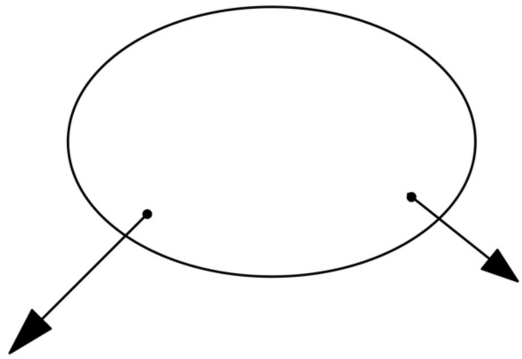
１２.１　剛体と剛体に作用する力

・剛体に作用する力の三要素＝力の大きさ、向き、作用線

・剛体に作用する力の合成

① 平行でない２つの力

作用線を延ばして交点を取り、平行移動して合成

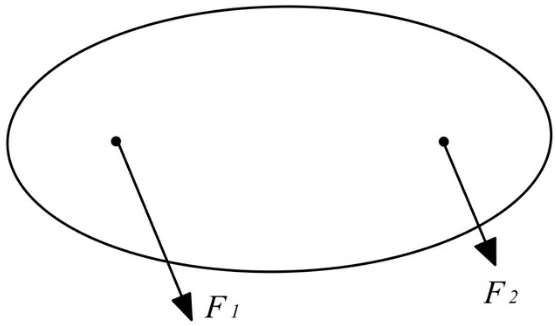


② 平行で同じ向きの２つの力

大きさ＝2 つの力の大きさの和F_1+F_2

向き　＝2 つの力と同じ

作用線＝2 つの力の作用点間をF_2：F_1に内分する点を通り、2 つの力に平行な直線

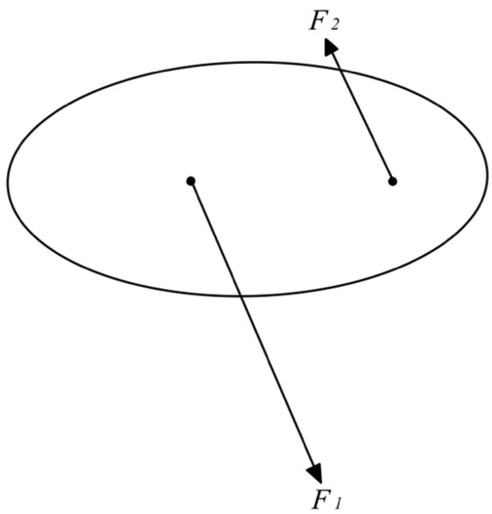


③ 平行で逆向きの２つの力(F_1>F_2のとき)

大きさ=2 つの力の大きさの差F_1-F_2

向き　=大きい方の力と同じ

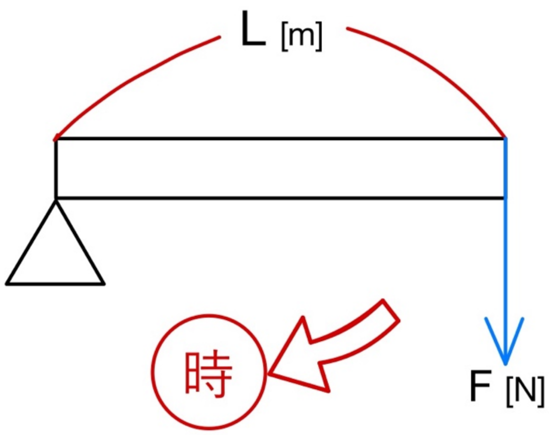
作用線=2 つの力の作用点間をF_2:F_1に外分する点を通り、2 つの力に平行な直線



１２.２　力のモーメントと剛体のつり合い

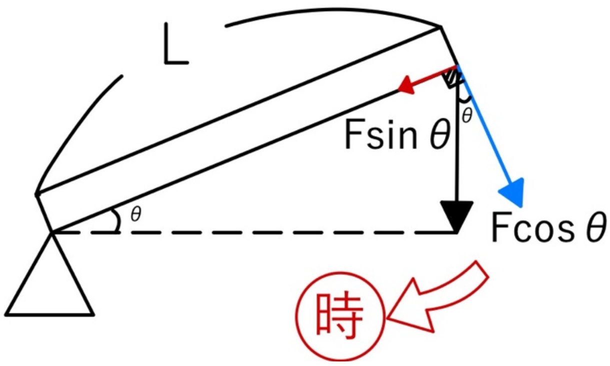
剛体：長さがあり変化しない物体

モーメント（トルク）：回転能力（$\boldsymbol{F}[\mathbf{N}] \times \boldsymbol{L}[\mathbf{m}]$）



【棒と力が垂直ではないモーメント】

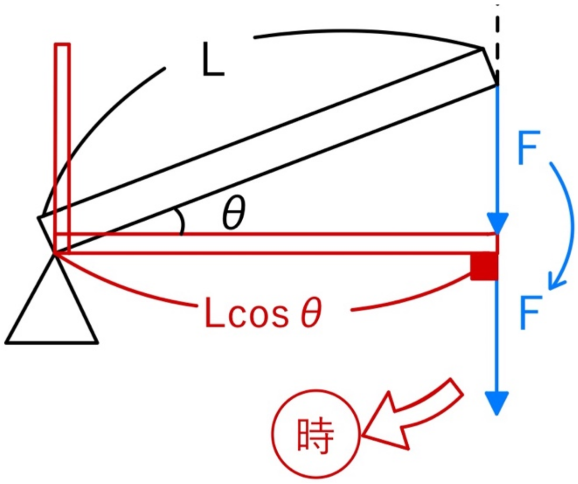
①　力を分解するパターン



$$\text{モーメント} = F\cos\theta \times L$$
$$= FL\cos\theta$$

※$F\sin\theta$は回転には関係ない

② 棒を分解するパターン



$$モーメント = F \times L\cos\theta$$
$$= FL\cos\theta$$

※力の矢印は矢印の延長線（作用線）上に移動できる（平行移動はダメ）

（まとめ）

物体に作用している各力ごとにモーメントを求め、剛体が回転しないならばこれらの合計が０となる。従って、回転しない条件は

(右回りのモーメントの合計)=(左回りのモーメントの合計)

となる。

回転していない場合、どこを中心に考えても回転をしないので、どこ周りでモーメントのつり合いを立てるかは自由である。

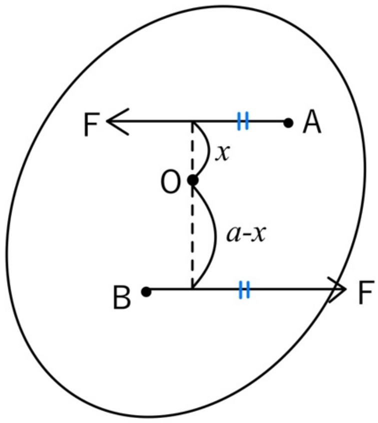
なお、力のモーメントのつり合いが成立するのは、剛体が静止している場合に加えて、回転軸回りの角速度が一定の場合、剛体の質量が無視できる場合がある。

剛体が静止している場合、力のモーメントがつり合うことに加えて、力のつり合いが成立する。

※３次元モーメントは演習で扱う

１２.３ 偶力（平行で逆向きで大きさの等しい力の合成）

ここまでで剛体に作用する力の合成方法を学んだが、大きさが同じで互いに逆向きの力については、力の作用点を結ぶ線分を 1:1 に外分する点は存在しないから、この２つの力を合成することはできない。そこで、このような２つの力は１組として考え、これを**偶力**という。



偶力の作用線間の距離をa[m]、片方の作用線から回転軸Ｏまでの距離をx[m]、力の大きさをF[N]とすると、この回転軸まわりの力のモーメントの和は

$$N = F \cdot x + F \cdot (a - x) = Fa$$

となり、xに依存しない。すなわち、回転軸をどの位置にとっても、その回転軸のまわりの偶力のモーメントは一定である。

一般に、力の回転軸Ｏまわりの力のモーメントは$N = F_{\perp} r$であり、力のうちの垂直成分が剛体を回転させる作用を持ち、平行成分は回転軸を動かそうとする力、すなわち剛体を移動させる作用を持っている。これに対して偶力はどの回転軸まわりに対しても剛体を回転させる作用のみしか持たない。

【偶力のモーメント】
大きさF[N]の２力が平行で互いに逆向きに作用しているとき、この一組を偶力という。
偶力のモーメントは、作用線間の距離をaとすると、

$$N = Fa$$

で与えられ、回転軸の位置によらない。

１３.２ 重心

重心とは、簡単に言うと物体（剛体）の中心である。

重さを考慮した時にその点を支えると全体を支えることができる点ということである。
（重さ的にバランスの取れる点）

物体の重心位置を求めるためには次のようにすればよい。図にあるようにまず２つの物体の重心位置について考える。

２物体の重心の位置の式

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} [\mathrm{m}]$$

重心の位置の式

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdot \cdot \cdot + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdot \cdot \cdot + m_n} [\mathrm{m}]$$

以上より、剛体がいかなる向きを取っていても剛体に作用する重力の全合力は、重心に対して全質量分の重力が作用しているとだけ考えればよく、**重心まわりの重力のモーメントの和は必ず０となる**ことが言える。

一般的な物体の重心位置は以上に述べたような複雑な計算手続きを踏む必要があるが、一様な密度を持つ物体の場合は幾何学的対称性から明らかなことが多い。例えば一様な棒の重心はその中点に、また一様な円盤や正方形板、球の重心はその中心にある。